信息经济学

第三课：经典博弈模型

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

2024 年 3 月 14 日

古诺模型（Cournot duopoly）

- 玩家：两家公司在同一市场竞争（双寡头竞争）
- 策略：同一种产品的生产数量（q_1，q_2）
- 不变的边际生产成本 c
- 价格：$p = a - b(q_1 + q_2)$
- 利润最大化

$$\max U_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

$$\text{一阶条件：} \quad a - 2bq^* - bq_2 - c = 0$$

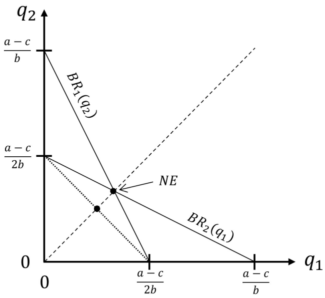
$$\text{二阶条件：} \quad -2b < 0$$

$$q_1^* = BR_1(q_2) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} \qquad q_2^* = BR_2(q_1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

纳什均衡

- 策略性替代游戏（Strategic substitutes）：我的策略是你的策略的替代品

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2^*}{2} \\ q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1^*}{2} \end{cases} \Longrightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b} \quad (\text{古诺产出})$$

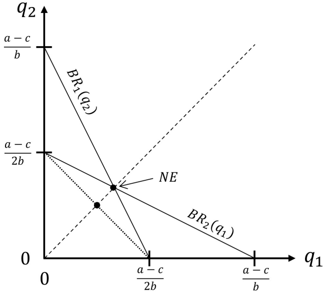


纳什均衡

- 从图像解释 $\frac{a-c}{2b}$ 和 $\frac{a-c}{b}$（主动和逼迫退出市场）

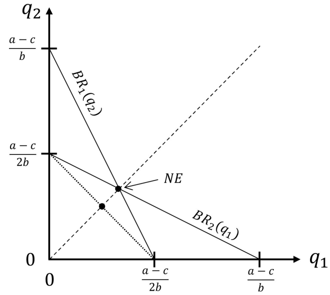
$$MR = a - 2bq = c = MC \implies q^M = \frac{a-c}{2b} \quad \text{（垄断产出）}$$

$$p = c \implies q^{PC} = \frac{a-c}{b} \quad \text{（完全竞争产出）}$$



纳什均衡

- 点线上的点都能使行业利润最大化
- 假设两家公司都同意生产 $q^M/2$，会出现什么问题呢？
- 双方都会反悔，会朝着纳什均衡点前进（$BR_1(q^M/2)$，$BR_2(BR_1(q^M/2))$，$BR_1(BR_2(BR_1(q^M/2)))$，$\ldots$）
- 即使都同意，在一个有利可图的行业，新的公司会进入市场



比较

- 总产量（生产者角度）：完全竞争 $>$ 古诺竞争 $= \frac{2(a-c)}{3b} >$ 垄断
- 价格（消费者角度）：完全竞争 $<$ 古诺竞争 $<$ 垄断

伯特兰德模型（Bertrand model）

- 另一种不完全竞争模型
- 古诺竞争是产量竞争，而伯特兰德竞争是价格竞争
- 玩家：两家公司生产同一种产品
- 策略：销售价格 p_1，p_2 $(0 \leq p_i \leq 1)$，然后基于需求生产
- 不变的边际成本 c
- 总需求 $Q(p) = 1 - \min\{p_1, p_2\}$
- 公司 1 的需求函数

$$q_1 = \begin{cases} 1 - p_1, & \text{if } p_1 < p_2 \\ 0, & \text{if } p_1 > p_2 \\ \frac{1-p_1}{2}, & \text{if } p_1 = p_2 \end{cases}$$

- 效用：利润 $= p_1 q_1 - c q_1 = (p_1 - c) q_1$

纳什均衡

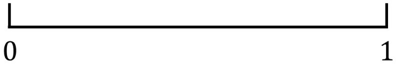
- 给定 p_2，寻找公司 1 的最优反应函数

$$BR_1(p_2) = \begin{cases} p_1(> p_2), & \text{if } p_2 < c \\ p_1 \geq c = p_2, & \text{if } p_2 = c \\ p_1 = p_2 - \epsilon, & \text{if } c < p_2 \leq p^M \\ p^M, & \text{if } p_2 > p^M \end{cases}$$

- $BR_1(p_2)$ 是一个非连续函数。在第一种情况下，公司 1 退出市场。在第二种情况下，定价大于或者等于 c，利润都是 0。在第三种情况下，公司 1 占领市场。在第四种情况下，垄断价格带来最大利润
- $NE = (c, c)$
- 尽管只有两家公司，但结果正如有很多家公司的完全竞争市场一样，定价都为 c，利润都为 0
- 与古诺模型相比，设定相同，仅策略集不同。得到了完全不同的结果，体现了建模方式的重要性

候选人-选民模型（Candidate-Voter model）

- 由同一类产品变为差异化产品
- 玩家：候选人和选民
- 每位选民都是潜在的候选人（候选人数量内生且不固定）
- 候选人不能改变其立场位置（别人都心知肚明）
- 假设
  - 选民在 $0-1$ 线段上均匀分布
  - 选民会投给离自己位置最近的候选人，票多者赢
  - 同票则抛硬币决定谁胜出
- 策略：参不参加选举
- 选举成本为 c

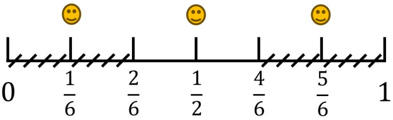


候选人-选民模型

- 效用：若选举获胜则获得效用 b（$\geq 2c$）。若位置在 y 的候选人获胜，则位置在 x 的选民的负效用为 $-|x-y|$
- 举例
    - 如果 x 参加选举并获胜，x 的效用为 $b-c$
    - 如果 x 参加选举但 y 获胜，x 的效用为 $-c-|x-y|$
    - 如果 x 不参加选举且 y 获胜，x 的效用为 $-|x-y|$
- 选择 N（奇数）个同学参加游戏，同时决定参不参选
    - 令 $b=2$ 和 $c=1$
    - 相邻一个位置产生的负效用为 $-1/N$
    - 谁会获胜？谁会偏离现在的行为？这是一个纳什均衡吗？
    - 玩多次

纳什均衡

- 存在多个纳什均衡
- 纳什均衡中可能没有候选人吗？不可能
- 纳什均衡中可能有一个候选人吗？可能，当有奇数个选民和候选人位于正中间时
- 纳什均衡中可能有两个候选人吗？可能，当两位候选人的位置对称并且相距不太远时，以 $1/2$ 的概率获胜
  - 外侧的人参选会输，并使一个距离自己更远的候选人获胜
  - 候选人会比较 $1/2 * b - c - 1/2 * |x - y|$ 和 $-|x - y|$（注意 $b \geq 2c$）
  - 如果两位候选人相距太远，则正中间的人会参选且获胜
  - 两位候选人相距多远，均衡才成立呢？三分天下得出 $(1/6, 5/6)$



启示

经验 7

如果两位候选人太极端，则持有中间态度的人可以参选。

经验 8

先猜测后验证的方法很有效。（注意所有可能的情况。）

选址模型（Location model）

- 有两座城市 E 和 W，各能容纳 100 人
- 玩家：两类人群 B 和 G，各 100 人
- 策略：人们同时选择居住城市，没有空间则随机分配
- 效用：若在你的城市中，你的同类有 n 人，则

$$
\text{你的效用} = \begin{cases} \frac{n}{50}, & 1 \leq n \leq 50 \\ \frac{3}{2} - \frac{n}{100}, & 50 < n \leq 100 \end{cases}
$$

- 人们更愿意当多数者
- 玩游戏，先均分人群，然后在两座城市设定不同的初始人口比例。玩多次，看最终结果的收敛速度

纳什均衡

- 先猜测后验证
- 两个隔离的纳什均衡（B 在 E，G 在 W）和（G 在 E，B 在 W）
  - 不搬家和搬家的效用分别为 $1/2$ 和 $1/50$
- 一个融合的纳什均衡（正好一半一半）
  - 不搬家和搬家的效用分别为 1 和 $1/2 * 1 + 1/2 * 99/100$
  - 人们更偏好这个均衡
  - 但这个均衡不稳定：偏离 50%（临界点，Tipping point），就会往隔离均衡发展
  - 例如，当 E 城有 49 个 B 人和 51 个 G 人时，B 人不搬家的效用 $49/50$ 小于搬家的效用 $\frac{51}{100} * \frac{99}{100} + \frac{49}{100} * \frac{98}{100}$

纳什均衡

- 如何避免聚集呢？(微机派位)
- 第三种纳什均衡（Centralized randomization)：全部选择同一座城市，然后被随机分配
- 第四种纳什均衡（Individual randomization)：每个人按照 $1/2$ 概率选择两座城市

经验 9

现实中常见的聚集结果不一定是最好的结果。让社会随机分配，人们被动接受，可能比主动选择要好。每个人的选择都对结果有影响。

Thanks!